

# Cevap Anahtarı

Adı Soyadı:  
Numarası:

05.11.2018

## CEBİR I QUIZ SORULARI

1)  $(m, n+km) = (m, n)$  olduğunu gösteriniz.

İçin  $(m, n+km) = d$  ve  $(m, n) = d'$  olsun.  $d = d'$  olduğunu göstermek için  $d|d'$  ve  $d'|d$  olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}(m, n+km) = d &\Rightarrow d|m \wedge d|n+km \\ &\Rightarrow d|km \wedge d|n+km \\ &\Rightarrow d|n+km-km \\ &\Rightarrow d|n \\ &\Rightarrow d|m \wedge d|n \\ &\Rightarrow d|(m, n) \\ &\Rightarrow d|d' \dots (1) \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(m, n) = d' &\Rightarrow d'|m \wedge d'|n \\ &\Rightarrow d'|km \wedge d'|n \\ &\Rightarrow d'|n+km \\ &\Rightarrow d'|m \wedge d'|n+km \\ &\Rightarrow d'|(m, n+km) \\ &\Rightarrow d'|d \dots (2)\end{aligned}$$

(1) ve (2) den istenen eşitlik elde edilir.

2)  $11^{9998}$  sayısının son üç rakamını bulunuz.

Yani  $11^{9998} \equiv x \pmod{1000}$  kongrüansında  $x$ 'i

bulalım.

Euler Teoremine göre  $(a, m) = 1$  ise  $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$  olduğundan

$$11^{\varphi(1000)} \equiv 1 \pmod{1000} \text{ olur.}$$

$$\varphi(1000) = \varphi(2^3) \cdot \varphi(5^3) = 4 \cdot 100 = 400 \text{ ise } 11^{400} \equiv 1 \pmod{1000}$$

Şimdi  $11^{9998} \equiv x \pmod{1000}$  kongrüansının her

iki tarafını  $11^2$  ile çarpalım.

$$11^{10000} \equiv 121x \pmod{1000} \text{ bulunur.}$$

$$\begin{aligned}
121x &\equiv 11^{10.000} \pmod{1000} \\
\Rightarrow 121x &\equiv (11^{400})^{25} \pmod{1000} \\
\Rightarrow 121x &\equiv 1 \pmod{1000} \\
\Rightarrow 1000 &\mid 121x - 1 \\
\Rightarrow 121x - 1 &= 1000y \text{ o.s. } y \in \mathbb{Z} \\
\Rightarrow 1000y &\equiv -1 \pmod{121} \\
\Rightarrow 32y &\equiv 120 \pmod{121} \\
\Rightarrow 4y &\equiv 15 \pmod{121} \\
\Rightarrow 121 &\mid 4y - 15 \\
\Rightarrow 4y - 15 &= 121z \\
\Rightarrow 121z &\equiv -15 \pmod{4} \\
\Rightarrow z &\equiv 1 \pmod{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4y - 15 = 121z &\Rightarrow 4y - 15 = 121 \\
&\Rightarrow y = 34
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
121x - 1 = 1000y &\Rightarrow 121x = 1000y + 1 \\
&\Rightarrow 121x = 34001 \\
&\Rightarrow x = 281
\end{aligned}$$

Son üç rakam 281 bulunur.